平成 16 年度
技術士第一次試験　共通科目
数学　＊＊＊　解答と解説　＊＊＊＊

1.　n が無限大の時の数列の挙動を調べる。

$$①\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{0}{1}=0\qquad \text{収束}$$

$$②\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)\}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\right)=0\qquad \text{収束}$$

$③\lim_{x\to\infty}\{1+(-1)^n\}$　n：偶数　2、奇数　0　よって　収束しない

$$④\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\qquad \text{収束}$$

$$⑤\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}=0\qquad -1\le\sin n\theta\le1\qquad \text{収束}$$

従って解答は③

2.　合成関数の微分

$$\frac{d}{dx}\{(f(x))^2 g(x)\}=2f(x)f'(x)g(x)+(f(x))^2$$

従って解答は　①

3.　$\dfrac{\sin x}{x}$ の挙動を調べる。

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\cos x}{1}=1$、$x=0,a=1$　で連続する。

従って解答は　②

4.　逆三角関数の倍角の公式と逆三角関数の正弦、余弦の関係を使う。

（1）

$\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$　、$\cos^{-1}x=2\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

$2\cos^{-1}\dfrac{1}{5}=2\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$　これより $1+x=\dfrac{2}{5^2}$，　$x=\dfrac{2}{25}-1=-\dfrac{23}{25}$

$$\cos^{-1}(-\frac{23}{25}) = \sin^{-1} y = \cos^{-1}\sqrt{1-y^2},\quad 1-y^2 = \frac{23^2}{25^2},\quad y = \sqrt{\frac{25^2-23^2}{25^2}} = \frac{\sqrt{48\cdot 2}}{25} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

（2）

$$\cos^{-1}\frac{1}{5} = \theta,\quad \cos\theta = \frac{1}{5},\ \sin\theta = \sqrt{1-(\frac{1}{5})^2} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

従って解答は　⑤

（3）

関数付電卓であれば$\sin(2\cos^{-1}\frac{1}{5}) = 0.391918$

①=0.4、②＝0.4899、③＝0.9798、④＝0.19896、⑤＝0.3919

従って厳密ではないが⑤と考えられる。

5.分子、分母にロピタルの定理を使いを計算する。

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\int_\pi^x t\sin\frac{t}{2}dt}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{d\int_\pi^x t\sin\frac{t}{2}dt}{1} = \lim_{x\to\pi} t\sin\frac{t}{2} = \pi$$

従って解答は①

6.　行列を展開し、関数を微分して極値を求める。

展開 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 2x & 2 \\ 3 & 3 & 3x \end{vmatrix} = x(2x\times 3x - 2\times 3) - 1\times(-2\times 3) = 6x^3 - 6x + 6$

$$f'(x) = 18x^2 - 6 = 0,\ 3x^2 - 1 = 0,\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$f''(x) = 32x$　　ｘが正でグラフは下に凸、ｘが負で上に凸となり

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で極小、従って解答は⑤

7.　exp(x)の級数展開式を考える。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \quad + \frac{1}{n!}x^n +$$

$$xe^x = x + \frac{1}{1}x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + + \quad + \frac{1}{(n-1)!}x^n + \frac{1}{n!}x^{n+1} +$$

従って解答は③

8.　体積の積分式を０～1 まで積分する。

$$dV=\pi r^2dx=\pi x^3dx,\quad V=\int_0^1 dV=\left|\pi\frac{1}{4}x^4\right|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

従って解答は④

9.　変数分離形微分方程式を解く。

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^3},\quad -\frac{1}{y}=-\frac{1}{2x^2}+C,\quad y=\frac{2x^2}{1-2Cx^2},$$

$$x=1,y=1\quad C=-\frac{1}{2},\quad y=\frac{2x^2}{1+x^2}$$

従って解答は⑤

10.　被積分関数を部分分数にして積分し、極限をとる。

$$\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx=\log x-\log(x+1)=\log\frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\log 1=0,\ \log\frac{1}{1+1}=\log 1-\log 2=-\log 2$$

$$\int_1^\infty\frac{1}{x(x+1)}dx=0-(-\log 2)=\log 2$$

従って解答は③

11.　与関数の偏微分を考える。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=-e^x\sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=e^x\cos y$$

従って解答は④

12.　積分範囲のｙにｘを含むために、最初にｙで定積分し、次にｘで定積分する。

$$\iint(x+ay)dydx=\int\left|xy+\frac{1}{2}ay^2\right|_0^x dx=\int_0^1(x^2+\frac{1}{2}ax^2)dx=\left|\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}ax^3\right|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}a=1,\quad \therefore a=4$$

従って解答は⑤

13.　2 次方程式の根の公式より計算する。

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2i\pm\sqrt{(2i)^2+4\cdot 2}}{2}=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+8}}{2}=-i\pm 1$$

従って解答は④

14.　3 次元空間における直線の方程式を考える。

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),\quad z-z_1=\frac{z_2-z_1}{y_2-y_1}(y-y_1)$$

即ち、ｘ－ｙ面内とｙ－ｚ面内の直線を別々に考えればよい。

これらの式に（1,2,3）と（2,3,1）を代入すると

$y-2=x-1,\quad z-3=-2(y-2)$　　となり

この式に、3 番目の（ｘ、1、ｙ）のｙ＝1 を適用すると

ｘ＝０、ｙ（ｚ）＝５　　となる。

従って解答は②

15.　２つのベクトル（直線）が直行する場合のの交角θの cos　θ＝０

また、単位ベクトルの各成分を a,b,c　すると、単位ベクトルの特性も入れて

$1\cdot a-2\cdot b+3\cdot c=0,\quad 3\cdot a-2\cdot b+1\cdot c=0$

$a^2+b^2+c^2=1$

$a=c, b=2a,$

これより　$a^2+4a^2+a^2=1,\ a=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

従って単位ベクトルは　$(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$

従って解答は②

16.　行列の演算をする。

$$\begin{pmatrix}x & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x^2\\ -1 & -x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & x^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$x^2=0,\quad x=0$

従って解答は③

17.　n 次正方行列 A の同値の定義

・A が正則ならば AX=E なる X が存在する。

・A によって決まる数 r を行列 A の階数と言う。

・n 次正方行列 A が正則であるためには、その階数が n に等しいことが必要かつ充分な条件である。

・A が正則ならば、左あるいは右基本変形だけによって、A を単位行列に変形する

ことができる。逆もまた正しい。

齋藤正彦著　　「線形代数入門」　P-46～52

A の固有値は関係ないので、従って解答は④

18.　1 行目で余因子行列式に展開する。

$$-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 4 & -5\\0 & 2 & 2\\0 & 0 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

2 項目は０、1 項目は（－1）（－2）＝2　となる。

従って解答は③

19.　x、y、z に関する連立方程式の係数行列式が０となる、ことでλを求める。

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & -\lambda & 1\\1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\1 & -\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -\lambda\\1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda^2-1)-(-\lambda-1)+(1+\lambda)=\lambda^3+\lambda+2=0$$

この 3 次方程式はまともに解くには手間であるが、解答の 5 択からみて

λ＝－１が上記を満足する。因みに因数分解すると

$(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+2)=0$　従って解答は⑤

20.　A の 2 乗の固有値行列を解いて求める。

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -9\\-6 & 7\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}10-\lambda & -9\\6 & 7-\lambda\end{vmatrix}=(10-\lambda)(7-\lambda)-54=\lambda^2-17\lambda+16=0$$

$$\lambda=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot16}}{2}=\frac{17\pm15}{2}=16\ \ or 1$$

従って解答は④