平成16年度　技術士第一次試験　共通科目　数学
問題と解説・解答

1.　発散する（収束しない）数列は、次のどれか。

①$\left\{\dfrac{n-1}{n^2+1}\right\}$　　②$\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$　　③$\left\{1+(-1)^n\right\}$

④$\left\{(1+\dfrac{1}{n})^n\right\}$　　⑤$\left\{\dfrac{\sin n\theta}{n}\right\}$

解説と解答：

n が無限大の時の数列の挙動を調べる。

①$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n-1}{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}})=\dfrac{0}{1}=0$　　収束

②$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{n}(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{n}(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{8n^2}+)=0$　収束

③$\lim\limits_{x\to\infty}\{1+(-1)^n\}$　n：偶数　2、奇数　0　よって　収束しない

④$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$　　収束

⑤$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(n\theta)}{n}=0$　　$-1\le\sin n\theta\le 1$　　収束

従って解答は③

2.　２つの微分可能な関数　$f(x)$, $g(x)$ に対して、$\left\{f(x)\right\}^2 g(x)$ の導関数は次のどれか。

①$2f'(x)f(x)g(x)+\left\{f(x)\right\}^2 g'(x)$

②$2f'(x)f(x)g'(x)+\left\{f(x)\right\}^2 g'(x)$

③$\left\{f'(x)\right\}^2 g(x)+\left\{f(x)\right\}^2 g'(x)$

④$\left\{f'(x)\right\}^2 g(x)+2f'(x)f(x)g'(x)$

⑤$\left\{f'(x)\right\}^2 g(x)+2f'(x)f(x)g(x)$

解説と解答：

合成関数の微分

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)\right\}^2 g(x)=\frac{d}{dx}\left\{f(x)\right\}^2 g(x)+\left\{f(x)\right\}^2\frac{d}{dx}g(x)$$

$$=2f(x)f'(x)g(x)+\left\{f(x)\right\}^2 g'(x)$$

従って解答は　①

3.　関数　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$　に関して、次の命題のうち正しいものはどれか。

①$a=0$のとき、$f(x)$は連続となる。

②$a=1$のとき、$f(x)$は連続となる。

③aの値にかかわらず、$f(x)$は連続となる。

④aの値にかかわらず、$f(x)$は連続でない。

⑤aの値にかかわらず、$f(x)$は連続性の判定はできない。

解説と解答：

$\dfrac{\sin x}{x}$の挙動を調べる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1、\ x=0, a=1\quad で連続する。$$

従って解答は　②

4.　$\sin(2\cos^{-1}\dfrac{1}{5})$の値は、次のどれか。

①$\dfrac{1}{5}$　　②$\dfrac{\sqrt{6}}{5}$　　③$\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$　　④$\dfrac{2\sqrt{6}}{25}$　　⑤$\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$

解説と解答：

逆三角関数の倍角の公式と逆三角関数の正弦、余弦の関係を使う。

（1）解法１

$$\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\qquad、\cos^{-1}x=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

$$2\cos^{-1}\frac{1}{5}=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}\quad これより\ 1+x=\frac{2}{5^2},\quad x=\frac{2}{25}-1=-\frac{23}{25}$$

$$\cos^{-1}(-\frac{23}{25}) = \sin^{-1} y = \cos^{-1}\sqrt{1-y^2}, \quad 1-y^2 = \frac{23^2}{25^2}, \quad y = \sqrt{\frac{25^2-23^2}{25^2}} = \frac{\sqrt{48\cdot 2}}{25} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

（2）解法２

$$\cos^{-1}\frac{1}{5} = \theta, \quad \cos\theta = \frac{1}{5}, \ \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{1}{5})^2} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\sin(2\cos^{-1}\frac{1}{5}) = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

従って解答は　⑤

（3）解法３

関数付電卓であれば$\sin(2\cos^{-1}\frac{1}{5}) = 0.391918$

①=0.4、②＝0.4899、③＝0.9798、④＝0.19896、⑤＝0.3919

従って厳密ではないが⑤と考えられる。

5.　$\lim_{x\to\pi}\frac{\int_{\pi}^{x} t\sin\frac{t}{2}dt}{x-\pi}$　の値は、次のどれか。

①π　　②　１　　③　０　　④－１　　⑤－π

解説と解答：

分子、分母にロピタルの定理を使いを計算する。

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\int_{\pi}^{x} t\sin\frac{t}{2}dt}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{d\int_{\pi}^{x} t\sin\frac{t}{2}dt}{1} = \lim_{x\to\pi} x\sin\frac{x}{2} = \pi$$

従って解答は①

6.　関数 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 2x & 2 \\ 3 & 3 & 3x \end{vmatrix}$　が極小となるときの x の値は、次のどれか。

解説と解答：

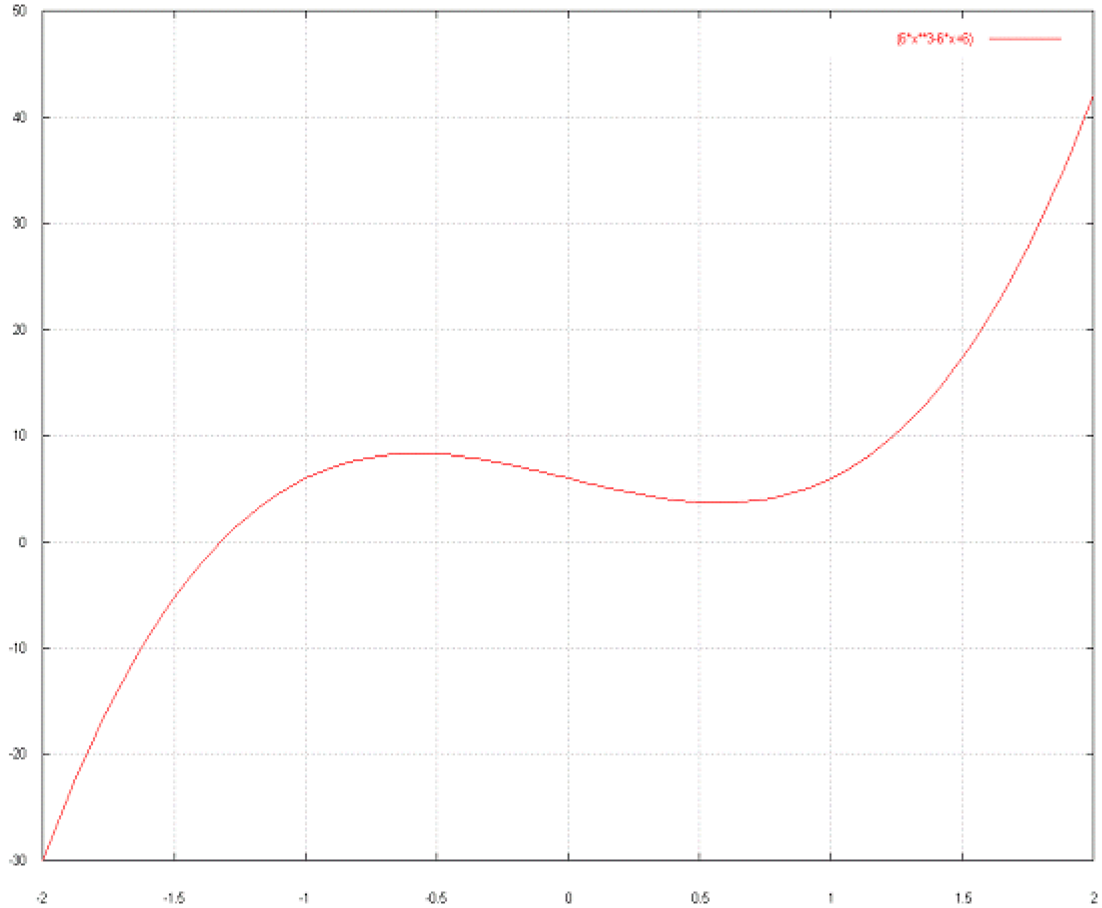
行列を展開し、関数を微分して極値を求める。

展開 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 2x & 2 \\ 3 & 3 & 3x \end{vmatrix}=x(2x\times 3x-2\times 3)-1\times(-2\times 3)=6x^3-6x+6$

$f'(x)=18x^2-6=0,\ 3x^2-1=0,\ \ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$f''(x)=32x$

x が正でグラフは下に凸、 x が負で上に凸となり



$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で極小、従って解答は⑤

7.　関数 $y=xe^x$　をマクローリン展開をするとき、その展開式の x^n $(n\geq 1)$ の係数は次のどれか、但し、e は自然対数の底とする。

$(n-1)!$　　② $n!$　　③ $\dfrac{1}{(n-1)!}$　　④ $\dfrac{1}{n!}$　　⑤ 1

解説と解答：

exp(x)の級数展開式を考える。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \quad + \frac{1}{n!}x^n +$$

$$xe^x = x + \frac{1}{1}x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + + \quad + \frac{1}{(n-1)!}x^n + \frac{1}{n!}x^{n+1} +$$

従って解答は③

8.　曲線 $y = \sqrt{x^3}$ と x 軸及び直線 $x = 1$ とで囲まれた部分を、x 軸周りに回転させて得られる回転体の体積は、次のどれか。

①π　②$\frac{\pi}{2}$　③$\frac{\pi}{3}$　④$\frac{\pi}{4}$　⑤$\frac{\pi}{5}$

解説と解答：

体積の積分式を０～1 まで積分する。

$$dV = \pi r^2 dx = \pi x^3 dx,\quad V = \int_0^1 dV = \left|\pi \frac{1}{4}x^4\right|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

従って解答は④

9.　微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^3}$ を初期条件「$x = 1$ のとき、$y = 1$」のもとで解くと、そのかいは次のどれか。

①$y = \frac{3x^2}{x^2+2}$　②$y = \frac{2x^2}{3x^2-2}$　③$y = \frac{2x^2}{x^2-3}$

④$y = \frac{x^2}{2x^2-1}$　⑤$y = \frac{2x^2}{x^2+1}$

解説と解答：

変数分離形微分方程式を解く。

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^3},\quad -\frac{1}{y} = -\frac{1}{2x^2} + C,\quad y = \frac{2x^2}{1-2Cx^2},$$

$$x = 1, y = 1 \quad C = -\frac{1}{2},\quad y = \frac{2x^2}{1+x^2}$$

従って解答は⑤

10.　広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}dx$ の値は、次のどれか。

①1　　②2　　③$\log 2$　　④$\log 3$　　⑤存在しない

解説と解答：

被積分関数を部分分数にして積分し、極限をとる。

$$\int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dx = \log x - \log(x+1) = \log\frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \log 1 = 0,\ \log\frac{1}{1+1} = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}dx = 0 - (-\log 2) = \log 2$$

従って解答は③

11.　2変数関数 $z = e^x \sin y$ に対して、$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ は次のどれか、但し、e は自然対数の底とする。

①0　　②1　　③$e^x \sin y$　　④$e^x \cos y$　　⑤$e^x(\sin y + \cos y)$

解説と解答：

与関数の偏微分を考える。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \sin y,\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \cos y,\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = e^x \cos y$$

従って解答は④

12.　閉領域 $D: 0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$　に対して、$\iint_D (x + ay)dxdy = 1$ となるとき、定数 a の値は次のどれか。

①0　　②1　　③2　　④3　　⑤4

解説と解答：

積分範囲のｙにｘを含むために、最初にｙで定積分し、次にｘで定積分する。

$$\iint (x+ay)dydx = \int \left| xy + \frac{1}{2}ay^2 \right|_0^x dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{2}ax^2)dx = \left| \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}ax^3 \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}a = 1, \quad \therefore a = 4$$

従って解答は⑤

13.　複素数 z に関する2次方程式 $z^2 + 2iz - 2 = 0$ の解は、次のどれか。
ただし、$i = \sqrt{-1}$ とする。

①$1 \pm i$　　②$-1 \pm i$　　③$i \pm 1$　　④$-i \pm 1$　　⑤解なし

解説と解答：

2次方程式の根の公式より計算する。

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4+8}}{2} = -i \pm 1$$

従って解答は④

参考

2次方程式　$ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式について

一般に方程式の最高次数を n とすると、その次の次数 $n-1$ を消去した方程式を標準形という。この場合 $x = y - \dfrac{b}{na}$ を代入すればよい。

2次方程式の場合、方程式を $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$,$a \neq 0$ とすれば $x = y - \dfrac{b}{2a}$ を代入すると、

$$(y - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b}{a}(y - \frac{b}{2a}) + \frac{c}{a}$$

$$= y^2 - \frac{b}{a}y + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}y - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = y^2 + \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a^2} = 0$$

$$y^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\therefore \quad y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

従って、$x = y - \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3次方程式では2次の項を消去した、$x^3 + bx + c = 0$　が標準形である。

14.　３次元空間の　３点（1、2、3)、(2、3、1)、(　x　、1、 y　）が一直線上にあるとき、 x , y の値は次のどれか。

①$x=0,\ y=4$　　②$x=0,\ y=5$　　③$x=1,\ y=3$

④$x=1,\ y=4$　　⑤$x=2,\ y=1$

解説と解答：

3 次元空間における直線の方程式を考える。

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),\quad z-z_1=\frac{z_2-z_1}{y_2-y_1}(y-y_1)$$

即ち、ｘ－ｙ面内とｙ－ｚ面内の直線を別々に考えればよい。

これらの式に（1,2,3）と（2,3,1）を代入すると

$y-2=x-1,\quad z-3=-2(y-2)$　　となり

この式に、3 番目の（ｘ、1、ｙ）のｙ＝1 を適用すると

$x=0$ 、 $z=y=5$　　となる。

従って解答は②

15.　３次元空間の２つのベクトル（1、－2、3)、(3、－2、1）の両方に垂直な単位ベクトルで、成分がすべて正のものはどれか。

①$(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$　②$(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$　③$(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$

④$(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　⑤$(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

解説と解答：

２つのベクトル（直線）が直行する場合のの交角θの cos　θ＝0

また、単位ベクトルの各成分を a,b,c　すると、単位ベクトルの特性も入れて

$$1\cdot a-2\cdot b+3\cdot c=0,\quad 3\cdot a-2\cdot b+1\cdot c=0$$

$$a^2+b^2+c^2=1$$

$$\begin{cases}-2b+3c=-a\\ -2b+c=-3a\end{cases}$$

$$c=a, b=2a,$$

これより　$a^2+4a^2+a^2=1,\ a=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

従って単位ベクトルは　$(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$

従って解答は②

16.　３つの行列　$A=\begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}$、が $AB+C=O$ を満たすとき、x の値は次のどれか、ただし、O は零行列とする。

①－２　　②－１　　③０　　④　１　　⑤　２

解説と解答：

行列の演算をする。

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ -1 & -x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^2=0,\ \ x=0$

従って解答は③

17.　ｎ次正方行列Ａについて同値でない命題は、次のどれか。

①Ａは正則である。

②Ａの行列式の値は０でない。

③Ａの階数はｎである。

④Ａの全ての固有値の積は０となる。

⑤ＡＢ＝ＥとなるＢｎ次正方行列Ｂが存在する。ただし、Ｅはｎ次単位行列とする。

解説と解答：

n 次正方行列 A の同値の定義

・A が正則ならば AX=E なる X が存在する。

・A によって決まる数 r を行列 A の階数と言う。

・n 次正方行列 A が正則であるためには、その階数が n に等しいことが必要かつ充分な条件である。

・A が正則ならば、左あるいは右基本変形だけによって、A を単位行列に変形することができる。逆もまた正しい。

齋藤正彦著　　「線形代数入門」　P-46～52

A の固有値は関係ないので、従って解答は④

18.　行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ の値は、次のどれか。

①　0　　②　1　　③　2　　④　3　　⑤　4

解説と解答：

1 行目で余因子行列式に展開する。

$$-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1)(4)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(-5)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

$$= -1(-2) + 0 + 0 + 0 = 2$$

従って解答は③

19.　連立方程式 $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$ が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつとき、実数λの値は次のどれか。

①-1　　②$-\dfrac{1}{2}$　　③　0　　④$\dfrac{1}{2}$　　⑤　1

解説と解答：

x, y, z に関する連立方程式の係数行列式が 0 となる、ことでλを求める。

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda) = \lambda^3 + \lambda + 2 = 0$$

$$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) = 0$$

$$= (1 + \lambda)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+2)=0$$
$$\lambda=-1$$
$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}$$

方程式は 3 次方程式となるが、因数分解できるので、簡単に解が求まる。

従って解答は⑤

20.　行列 $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ について、A^2 の大きい方の固有値は次のどれか。

①　2　　②　4　　③　8　　④16　　⑤32

解説と解答：

A の 2 乗の固有値行列を解いて求める。

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 6 & 7-\lambda \end{vmatrix}=(10-\lambda)(7-\lambda)-54=\lambda^2-17\lambda+16=0$$
$$\lambda=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot16}}{2}=\frac{17\pm15}{2}=16\ \ or 1$$

従って解答は④