技術士第一次試験
平成 18 年度共通科目
数学　問題と解答

（A）　数学　　　　9時～11時

Ⅲ　次の 20 問題を解答せよ。（解答欄に１つだけマークすること。）

Ⅲ－1　$\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}+ax-b}{x^2}=2$ が成立する a, b の値は，次のどれか。ただし，e は自然対数の底とする。

① $a=0,\ \ b=0$　② $a=1,\ \ b=0$　③ $a=-1,\ \ b=1$
④ $a=2,\ \ b=1$　⑤ $a=-2,\ \ b=1$

解説と解答：

a,b の２数が１次と定数項であり、指数項と直接演算できないので、まず指数関数項を級数展開（マクローリン級数）する。

$$e^{2x}=1+2x+\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{3!}(2x)^3+\cdots$$
$$=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots$$

これを考慮すると与式は

$$\lim_{x \to 0}\frac{1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots\ +ax-b}{x^2}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{(1-b)+(2+a)x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots}{x^2}=2$$

即ち、$\lim_{x \to 0}(\quad)=2$　が存在するためには、

$1-b=0\quad b=1$
$a+2=0\quad a=-2$　が必要である。

従って、正解は⑤である。

Ⅲ－2　$\tan^{-1}(\sqrt{3}+2)+\tan^{-1}(\sqrt{3}-2)$ の値は，次のどれか。

①　0　　②　$\frac{\pi}{6}$　　③　$\frac{\pi}{4}$　　④　$\frac{\pi}{3}$　　⑤　$\frac{\pi}{2}$

解説と解答：

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$　逆三角関数の和の公式を使用する。

$$\tan^{-1}(\sqrt{3}+2)+\tan^{-1}(\sqrt{3}-2)=\tan^{-1}\frac{(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)}{1-(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{1-(3-4)}=\tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2}=\tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

従って、正解は④である。

和の公式の証明：

まず最初に正接（tan）の和の公式を作り、その逆関数を求める。

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

これの逆関数を求める。

$$a+b=\tan^{-1}\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

ここで、$\begin{array}{l}\tan a=x\ ,\ a=\tan^{-1}x\\ \tan b=y\ ,\ b=\tan^{-1}y\end{array}$ とおくと、

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$　となる。

Ⅲ－3　関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，正しくないものは次のどれか。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

① $f(x)=3x+2$ の逆関数は，$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$ である。

② $f(x)=e^{x}-3$ の逆関数は，$f^{-1}(x)=\log(x+3)$ である。

③ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の逆関数は，$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$ である。

④ $f(x)=\sin 2x$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ の逆関数は，$f^{-1}(x)=\sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ である。

⑤ $f(x)=(x+1)^2$ $(x\geqq -1)$ の逆関数は，$f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$ である。

解説と解答：

各項の逆関数を求める。

① $y=3x+2$, $x=\dfrac{1}{3}(y-2)$, $\therefore$ $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$ 　従って正しい。

② $y=e^{x}-3$, $x=\log(y+3)$, $\therefore$ $f^{-1}(x)=\log(x+3)$ 　従って正しい。

③ $y=\dfrac{1}{x}$, $x=\dfrac{1}{y}$, $\therefore$ $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$ 　従って正しい。

④ $y=\sin 2x$, $2x=\sin^{-1}y$, $x=\dfrac{1}{2}\sin^{-1}y$, $\therefore$ $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\sin^{-1}x$ 　従って誤り。

⑤ $y=(x+1)^2$, $x=\sqrt{y}-1$, $\therefore$ $f^{-1}(x)=\sqrt{x}-1$ 　従って正しい。

以上より正解は④である。

Ⅲ－4　関数 $y=\log(\sin^2 x)$ の導関数は次のどれか。ただし，対数は自然対数である。

① $\tan x$　② $\dfrac{1}{\tan x}$　③ $2\tan x$　④ $\dfrac{2}{\tan x}$　⑤ $\dfrac{1}{2\tan x}$

解説と解答：

合成関数の微分として考える。

$$t=\sin x,\ s=\sin^2 x=t^2$$

$$\frac{d\{\log(\sin^2 x)\}}{dx}=\frac{d\log s}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{s}2t\cos x$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x}2\sin x\cos x=2\frac{\cos x}{\sin x}=2\frac{1}{\tan x}$$

従って正解は④である。

Ⅲ－5　$f(x)=\tan^{-1}x$ のとき，$f''(1)$ の値は次のどれか。

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

解説と解答：

逆正接の２階微分を考える。

まず予式の１階部分をとる。

$$y=\tan^{-1}x\ ,\ x=\tan y=\frac{\sin y}{\cos y}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\cos y\cos y-\sin y(-\sin y)}{\cos^2 y}=\frac{\cos y\cos y+\sin y\sin y}{\cos^2 y}=\frac{1}{\cos^2 y}$$

ここで、三角関数のピタゴラスの定理を適用して正接に直す。

$$\sin^2 y+\cos^2 y=1\ ,\ \tan^2 y+1=\frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

次に２階微分を考える。

$$\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

これに $x=1$ を代入する。

$$f''(1)=-\frac{2\times 1}{(1+1^2)^2}=-\frac{2}{2^2}=-\frac{1}{2}$$

従って、正解は②である。

Ⅲ－6　$\int_a^{\infty}(1+x)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}$ が成り立つとき，a の値は次のどれか。

① 5　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

解説と解答：

代数関数の積分を考える。

$$\int_a^\infty (1+x)^{-\frac{3}{2}}dx = \left| \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}(1+x)^{-\frac{3}{2}+1} \right|_a^\infty = \left| -2\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right|_a^\infty$$

$$= 0-(-2\frac{1}{\sqrt{1+a}}) = \frac{2}{\sqrt{1+a}} = \frac{1}{2}$$

これから、a を求める。

$$\frac{2}{\sqrt{1+a}} = \frac{1}{2}\,,\ \sqrt{1+a} = 4$$

$$1+a = 16\,,\ a = 16-1 = 15$$

従って、正解は③である。

III－7　微分方程式 $\frac{dy}{dx} = -4xy$ を初期条件「$x=1$ のとき $y=1$」のもとで解くと，その解は次のどれか。ただし，e は自然対数の底とする。

① $y = e^{x}$　② $y = e^{2x^2}$　③ $y = -e^{-2x^2}$

④ $y = e^{2x^2+2}$　⑤ $y = e^{-2x^2+2}$

解説と解答：

変数分離型の１階微分方程式を初期条件のもとで解けばよい。

$$\frac{dy}{y} = -4xdx\,,\ \log y = -2x^2 + c$$

$$y = Ce^{-2x^2}$$

これに初期条件　$x=1\,,\ y=1$　を代入し積分定数 C を求める。

$$1 = Ce^{-2\cdot 1}\,,\ C = e^2$$

$$y = e^2 e^{-2x^2} = e^{-2x^2+2}$$

従って、正解は⑤である。

Ⅲ－８　極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$ は，次のどれか。

①　0　　②　1　　③　2　　④　π　　⑤　∞

解説と解答：

x, y の変数を r, θ の極座標に変換しても一般性を失わない。

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$　として与式に代入する。

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{\sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}{|r\cos\theta|+|r\sin\theta|}\ ,\quad r \geq 0\ ,\ -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin r^2}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 - \frac{1}{6}r^6 + \cdots}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)} = \lim_{r\to 0} \frac{r - \frac{1}{6}r^5 + \cdots}{(|\cos\theta|+|\sin\theta|)} = 0$$

ここで、$|\cos\theta|+|\sin\theta| > 0$　を使う。

従って、正解は①である。

Ⅲ－９　２変数関数 $z = \sin(x-2y) + \cos(x-2y)$ に対して，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ は，次のどれか。

①　$-5z$　　②　$-3z$　　③　$-z$　　④　$3z$　　⑤　$5z$

解説と解答：

与式の偏微分を考える。

$$t = x - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \cos(x-2y) - \sin(x-2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x-2y) - \cos(x-2y) = -z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \{\cos(x-2y) - \sin(x-2y)\}(-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \{-\sin(x-2y) - \cos(x-2y)\}(-2)(-2) = -4z$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -z - 4z = -5z$$

従って、正解は①である。

Ⅲ−10　重積分 $\iint_D e^{-x+y}dxdy$ の値は，次のどれか。ただし，$D: 0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ とし，e は自然対数の底とする。

① $e-2$　② $e-1$　③ e^{-1}　④ e　⑤ $e+1$

解説と解答：

この二重積分を最初に y で積分し、次に x で積分する。

$$\iint_D e^{-x+y}dxdy = \iint e^{-x}e^{y}dxdy = \int e^{-x}\left|e^{y}\right|_0^x dx$$
$$= \int_0^1 e^{-x}(e^x - 1)dx = \int_0^1 (1-e^{-x})dx = \left|x + e^{-x}\right|_0^1$$
$$= 1 + e^{-1} - (0 + e^{-0}) = e^{-1}$$

従って、正解は③である。

Ⅲ−11　$x = 1-2i$ のとき，$x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 22x + 5$ の値は次のどれか。ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする。

① $1+2i$　② $1+i$　③ 0　④ 1　⑤ 10

解説と解答：

与式は簡単な因数分解ができないので、複素数計算する。

$$x = 1-2i$$
$$x^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$$
$$x^3 = (-3-4i)(1-2i) = -3 + 6i - 4i + 8i^2 = -11 + 2i$$
$$x^4 = (-3-4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i$$
$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 22x + 5$$
$$= -7 + 24i + (-22 + 4i) - (-12 - 16i) + 22 - 44i + 5$$
$$= (-7 - 22 + 12 + 22 + 5) + (24 + 4 + 16 - 44)i$$
$$= 10 + 0i$$

従って、正解は⑤である。

Ⅲ−12　3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(0,1,b)$, $\boldsymbol{c}=(1,1,c)$ が互いに垂直であるとき，a の値は次のどれか。

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

解説と解答：

２つのベクトルが直交する条件式を $(\overline{a},\overline{b})$ $(\overline{b},\overline{c})$ $(\overline{c},\overline{a})$ に適用する。

２つのベクトルの直交条件は $\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}=0$

$\therefore\ a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

この関係を３つのベクトルに適用する。

$1+b=0$

$1+bc=0$

$a+1+c=0$

これらより、a,b,c を求める。

$b=-1$, $bc=-1$, $c=1$

$a=-1-c=-2$

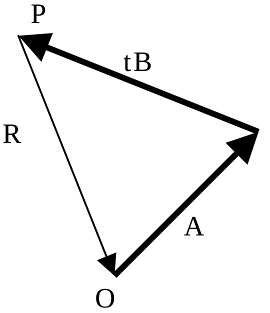
従って、正解は①である。

Ⅲ−13　2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ の長さが最小となる t の値は，次のどれか。

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{5}{6}$

解説と解答：

$r=a+tb$ とする。



O 点を 2 次元座標の原点にとると、P 点の座標は、$x=3-3t$, $y=1+t$　となる。

従って、$r=a+tb$　の長さ（距離）は $\left|r^2\right|=x^2+y^2$ となる。

これの最小値（微分＝０）からtを求める。

$$|r^2|=(3-3t)^2+(1+t)^2=9-18t+9t^2+1+2t+t^2$$
$$=10-16t+10t^2$$
$$\frac{d|r^2|}{dt}=-16+20t=0$$
$$t=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

従って、正解は④である。

別解として、

ベクトルr,bが直交する条件にても求めることが出来る。この条件は幾何学的にrが最小になる。

$$(3-3t)(-3)+(1+t)(1)=-9+9t+1+t=-8+10t=0$$
$$t=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

III－14　連立方程式 $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ x \quad + \quad z = 2 \\ x+y+2z = k \end{cases}$ が解を持つとき，k の値は次のどれか。

①　−2　　②　−1　　③　0　　④　1　　⑤　2

解説と解答：

与式の３元連立方程式の係数の作る行列式は

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$ となり、正則ではない。

従って、　第一式、第２式を連立して解いてみる。この場合未知数をx,zとする。

$$\begin{cases} 2x+3z=1-y & (1) \\ x+z=2 & (2) \end{cases}$$

(２)式を２倍して(１)から引くと

$$\begin{cases} 2x+3z=1-y \\ 2x+2z=4 \end{cases}$$

$z=-3-y$, $x=2-(-3-y)=5+y$

これを、第３式に代入する。

$$x+y+2z=5+y+y+(-6-2y)=-1=k$$

従って、正解は②である。

この場合は、丁度ｙが消えるような係数であり、解を持つと仮定して３元連立方程式を解いても求まる。

Ⅲ−15　全ての成分が実数である２次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と A の固有値 α, β に対して，正しくない命題は次のどれか。ただし，$\alpha=\beta$ のときもあり，$|A|$ は A の行列式である。

① $|A|=0$ のときは，α と β の少なくとも一方は 0 である。

② $|A|>0$ のときは，α と β はともに正である。

③ $|A|<0$ のときは，α と β の一方は正で，他方は負である。

④ $a+d=\alpha+\beta$ である。

⑤ $ad-bc=\alpha\beta$ である。

解説と解等：

与式Ａの固有値λ　を求める。

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-cb$$

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-cb)=0$$

$$\lambda=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-cb)}}{2}=\alpha+\beta$$

この関係を使って設問を検討する。

①$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-cb=0$　であるから

$$\lambda=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2}}{2}=(a+d)\ \ or\ \ 0$$　となり正しい。

②$|A|=ad-cb>0$　の場合は $(a+d)^2-4(ad-cb)$　が必ずしも正にはならず

誤り。

③前記の条件から見て $\lambda=\dfrac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2+4(ad-cb)}}{2}$ となり

固有値は正及び負となり、正しい。

④代数方程式の根と係数の関係から正しい。

$$\alpha+\beta=\frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2+4(ad-cb)}}{2}+\frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2+4(ad-cb)}}{2}$$

$$=\frac{(a+d)+(a+d)}{2}=a+d$$

⑤代数方程式の根と係数の関係より正しい。

$$\alpha\beta=\frac{(a+d)+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-cb)}}{2}\frac{(a+d)-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-cb)}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}[(a+d)^2-\{(a+d)^2-4(ad-cb)\}]=ad-cb$$

Ⅲ−16　2次の正方行列 A が $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ を満たすとき，行列 A は次のどれか。

① $\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 1\end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 2\end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}$

解説と解答：

正方行列 A を $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ と置いて、行列演算をする。

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix},\ a=-2,\ c=1$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b\\c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ a+b=1,\ c+d=3$$

$$b=1-a=1-(-2)=3$$

$$d=3-c=3-1=2$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$$

従って、正解は③である。

Ⅲ－17　行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ について，$AB+2B=E$ を満たす行列 B は，次のどれか。

ただし，E は単位行列である。

① $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

解説と解答：

与式を少し変形する。$AB+2B=(A+2E)B=E$

また $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & b \end{bmatrix}$ と仮定する。

$$(A+2E)B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 5a+3c & 5b+3d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+c=1 \\ 5a+3c=0 \\ 2b+d=0 \\ 5b+3d=1 \end{cases}$$

これを解いて

$6a+3c=3$

$5a+3c=0$

$a=3$, $c=1-2a=1-6=-5$

$6b+3d=0$

$5b+3d=1$

$b=-1$, $d=-2b=2$

$$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

従って、正解は③である。

Ⅲ−18　方程式 $\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1-t & 0 & t \end{vmatrix} = 0$ を満たす t の値は，次のどれか。

①　−2　　②　−1　　③　0　　④　1　　⑤　2

解説と解答：

与式の行列式を展開する。

$$\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1-t & 0 & t \end{vmatrix} = t(t) - (-3(1-t)) - 1(-(1-t))$$

$$t^2 + 3 - 3t + 1 - t = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$$

$$\therefore\ t = 2$$

従って、正解は⑤である。

Ⅲ−19　$a > 0$ とする。行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数が 2 のとき，a の値は次のどれか。

①　1　　②　2　　③　3　　④　4　　⑤　5

解説と解答：

与式の階数が 2 であるから、行列の基本変形により次のように変形できればよい。

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

そこで、まず 2 行目に 1 行目を加えると、

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$　次に 3 行目から 2 行目を引くと、$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 2-a & a-2 \end{bmatrix}$

3 行目の 2 列、3 列がともに等しく、かつ 0 になればよい。

$$2 - a = a - 2 = 0$$

$$\therefore\ a = 2$$

従って、正解は②である。

Ⅲ−20　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 1 に属する固有ベクトルは，次のどれか。

① $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

解説と解答：

行列 A の固有値λ、固有ベクトル $[u, v, w]^t$ は下記のように表される。

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0 \,, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \neq 0 \,, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^3 - (-1)(-2)(1-\lambda) + 2(-2)(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\{(1-\lambda)^2 - 2 - 4\} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 7) = 0$$

題意の固有値 1 は独立解 3 個の一つであり、重根ではない。従って固有ベクトルも独立したものが 3 組存在する。

そこで、前記基本式に $\lambda = 1$ を代入すると、

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -v + 2w = 0 \\ \quad -u = 0 \\ \quad 2u = 0 \end{cases} \qquad \text{ここで } w = 1 \text{ とすると} \qquad \text{固有ベクトルは} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = 0 \,, \; v = 2w$$

従って、正解は②である。

ちなみに、全ての固有値は次のようになる。

$$\lambda = 1 \,, \; \lambda = 1 \pm \sqrt{1+7} = 1 \pm 2\sqrt{2}$$