技術士第一次試験

平成 13 年度　共通科目数学　問題と解答

Ⅲ－１

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$　の値は、次のどれか。

①－１　②$-\frac{1}{2}$　③０　④$\frac{1}{2}$　⑤　１

解説と解答：

$\sqrt{1+x}$ の扱いにおいて、級数展開を利用する。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\{(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}+.....)-1\}\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\frac{1}{n}+....)=\frac{1}{2}$$

従って、正解は　④　。

Ⅲ－２

$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}})-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$　の値は、次のどれか。

①$\frac{\pi}{6}$　②$\frac{\pi}{3}$　③$\frac{\pi}{2}$　④$\frac{2\pi}{3}$　⑤$\frac{5\pi}{6}$

解説と解答：

$$\sin 45^\circ=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \cos 135^\circ=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 30^\circ=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

の関係を使用する。

$$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}})-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi+9\pi-2\pi}{12}=\frac{5\pi}{6}$$

従って、正解は　⑤　。

Ⅲ－３

二次関数　$f(x)=ax^2+bx+c$　と０でない実数ｈに対して

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)$$

を満たす　θの値は、次のどれか。

①a　②$\frac{a}{2}$　③2　④1　⑤$\frac{1}{2}$

解説と解答：

$f(x)=ax^2+bx+c$
$f'(x)=2ax+b$
として、

$$\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)}{h}=2a(x+\theta h)+b$$

$$\frac{2ahx+ah^2+bh}{h}=2ax+b+ah=2ax+2a\theta h+b$$

$$ah=2a\theta h\ ,\ \therefore \theta=\frac{ah}{2ah}=\frac{1}{2}$$

従って、正解は　⑤　。

Ⅲ－４

3 次関数　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　が実数全体の範囲で単調増加するための必要十分条件は、次のどれか。

①$a^2\leq 4b$　　②$a^2\leq 3b$　　③$a^2=3b$　　④$a^2\geq 3b$　　⑤$a^2\geq 4b$

解説と解答：

f(x)が実数全体で単調増加するためには、その微分（勾配）が常に正であることが、必要十分条件である。

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
$f'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$
$$=x^2+\frac{2a}{3}x+\frac{1}{3}b\geq 0$$

上式が実数範囲で常に正になるためには、完全平方になる必要がある。この関係から、係数の関係を求める。

$(x\pm\alpha)^2\geq 0$

$x^2\pm 2\alpha x+\alpha^2\geq 0$

$$\pm 2\alpha=\frac{2a}{3}\ ,\ \alpha^2=\frac{1}{3}b$$

$$\alpha=\mp\frac{1}{3}a\ ,\ b=\frac{1}{3}a^2\ ,\ a^2=3b$$

従って、正解は　③　。

Ⅲ－５

関数 $y=x^3e^x$ の第ｎ次導関数において、 xe^x の係数は次のどれか。

但し、e は自然対数の底とする。

①$\frac{1}{3}n(n-1)$　②$\frac{1}{2}n(n-1)$　③$n(n-1)$　④$2n(n-1)$　⑤$3n(n-1)$

解説と解答：

$y=g(x)e^x, g(x)=x^3$ として、ｙのｘでの高階微分を計算する。

$$
\begin{aligned}
y &= ge^x \\
y' &= g'e^x + ge^x = (g'+g)e^x \\
y'' &= (g''+g')e^x + (g'+g)e^x = (g''+2g'+g)e^x \\
y''' &= (g'''+2g''+g')e^x + (g''+2g'+g)e^x \\
&= (g'''+3g''+3g'+g)e^x \\
y^{(4)} &= (g^{(4)}+3g'''+3g''+g')e^x + (g'''+3g''+3g'+g)e^x \\
&= (g^{(4)}+4g'''+6g''+4g'+g)e^x
\end{aligned}
$$

$g=x^3$，$g'=3x^2$，$g''=6x$，$g'''=6$，$g^{(4)}=0$

上記より、g'' の係数を調べればよい。

$n=2$, $a=6$

$n=3$, $a=18$

$n=4$, $a=36$

この関係を回答群と比較すればよい。〔$3n(n-1)$〕

従って、正解は　⑤　。

Ⅲ－６

双曲線 $x^2-2y^2=2$　の点（２，１）における接線は、次のどれか。

①$y=x-1$　②$y=-x+3$　③$y=2x-3$　④$y=\frac{1}{2}x$　⑤$y=-\frac{1}{2}x+2$

解説と解答：

予式　$x^2-2y^2=2$　における、点（２，１）の接線勾配を求め、この点を通る直線の式を作る。

予式の微分

$2xdx-4ydy=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}=\frac{2}{2\times 1}=1$$

$y=1x+b$, $1=2+b$, $b=-1$

$\therefore\ y=x-1$

従って、正解は　①　。

Ⅲ－７

広義積分　$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$　の値は、次のどれか。但し e　は自然対数の底とする。

①$\frac{1}{4}$　②$\frac{1}{3}$　③$\frac{1}{2}$　④１　⑤2

解説と解答：

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}e^{-x^2}d(x^2) = \int_0^{\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}d(-x^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left|e^{-x^2}\right|_0^{\infty} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

従って、正解は　③　。

Ⅲ－８

楕円　$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$　をｘ軸の周りに１回転して得られる回転体の体積は、次のどれか。

①π　②$4\pi$　③$8\pi$　④$16\pi$　⑤$32\pi$

解説と解答：

予式をｙ＝　に変形し、任意のｘにおける、微小円盤　πy^2　を積分する。

積分範囲はｙ＝0 のｘ値である。

$$y^2 = 4-\frac{4}{9}x^2\ ,\ y = \pm 2\sqrt{1-\frac{1}{9}x^2}$$

$$y = 0\ ,\ x = \pm 3$$

$$V = \int_{-3}^{3}\pi y^2 dx = 2\pi\int_0^3 (4-\frac{4}{9}x^2)dx = 2\pi\left|4x-\frac{4}{27}x^3\right|_0^3$$

$$= 2\pi(4\times 3-\frac{4\times 3^3}{27}) = 2\pi\times 8 = 16\pi$$

従って、正解は　④　。

Ⅲ－９

次の級数の中で、発散するものはどれか。

①$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$

②$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$

③$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\frac{1}{\sqrt{4\cdot 6}}+\cdots$

④$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$

⑤$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$

解説と解答：

①～⑤の級数の中で、収束性が疑わしいのは③である。

①、②、④、については正項級数の収束性判定が適用できる。

①は exp(1)での初項が欠けているもの、②はゼータ関数、④は等比級数

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$$

① $\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\dfrac{1}{n+1}<1\ ,S=e-1$

② $\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=(\dfrac{n}{n+1})^2<1\ ,\ \ \varsigma(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$

④ $\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\dfrac{2^n}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}<1\ ,\ S=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

⑤は交代級数であり、

$a_n>0$, $a_n\geq a_{n+1}$, $a_n=0$　　を満足する。従って収束する。

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\log 2$$

③は

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\cdots$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{4\cdot 4}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 5}}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

これは、正項級数であるが、発散する。

従って、正解は　③　。

Ⅲ－１０

微分方程式　$\dfrac{dy}{dx}=y(1-y)$ を初期条件「$x=0$ の時、 $y=\dfrac{1}{2}$　」のもとで解くと、その

解は次のどれか。但し、e は自然対数の底とする。

①$\dfrac{1+e^x}{e^x}$　②$\dfrac{e^x}{1+e^x}$　③e^x　④$\dfrac{e^x}{1-e^x}$　⑤$\dfrac{1-e^x}{e^x}$

解説と解答：

微分方程式を変数分離して解く。

$$\frac{1}{y(1-y)}dy = dx$$

$$(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y})dy = dx$$

$$\log y - \log(1-y) = x + C$$

$$\log\frac{y}{1-y} = x + C,\ \frac{y}{1-y} = Ce^x$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = Ce^0 = C\ ,\ \therefore C = 1$$

$$y = (1-y)e^x,\quad y(1+e^x) = e^x\ ,\ y = \frac{e^x}{1+e^x}$$

従って、正解は　②　。

Ⅲ－１１

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$ のとき、$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$　は次のどれか。

①0　②$\dfrac{1}{3}$　③$\dfrac{1}{2}$　④1　⑤2

解説と解答：

行列式を展開して、偏微分する。

$$u=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y&z\\y^2&z^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x&z\\x^2&z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&y\\x^2&y^2\end{vmatrix}$$

$$=(yz^2-zy^2)-(xz^2-zx^2)+(xy^2-yx^2)$$

$$=xy^2-xz^2+yz^2-yx^2+zx^2-zy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-z^2-2yx+2zx$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z^2-x^2+2xy-2zy$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^2-y^2-2zx+2yz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

従って、正解は　①　。

Ⅲ－１２

重積分　$\iint_D xydxdy$　の値は、次のどれか。但し $D:0\leq x\leq 1$, $x^2\leq y\leq\sqrt{x}$　とする。

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤1

解説と解答：

ｙの積分範囲にｘを含むために、まずｙで積分し、次にｘで積分する。

$$\iint_D xydxdy=\int_0^1 x\left|\frac{1}{2}y^2\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 x\frac{1}{2}(x-x^4)dx=\int_0^1\frac{1}{2}(x^2-x^5)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6\right|_0^1=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})=\frac{1}{12}$$

従って、正解は　①　。

Ⅲ－１３

閉区間 $I=[a,b](a<b)$　の性質として正しくないものは、次のどれか。

①Ｉ上の任意の実数値連続関数は最大値と最小値をもつ。

②Ｉの任意の部分集合は最大元と最小元をもつ。

③Ｉの任意の数列は収束する部分列をふくむ。

④Ｉの任意の単調増加数列は収束する。

⑤Ｉは互いに交わらない２つの閉区間の和集合として表せない。

解説と解答：

閉区間を２分割できるので、それぞれを元とする。すなわち全区間は和集合として表すことができる。

①～④は正しいと考える。（少し自信がないが）

従って、正解は　⑤　。

Ⅲ－１４

５次元数ベクトル　$\left(\frac{1}{2}, x, -\frac{1}{2}, -x, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$　が単位ベクトルとなるとき、正の数ｘの値は次のどれか。

①$0$　②$\frac{1}{4}$　③$\frac{\sqrt{3}}{4}$　④$\frac{3}{4}$　⑤$\frac{1}{2}$

解説と解答：

単位ベクトルとは、そのベクトルの大きさ　$|A| = \sqrt{\sum a_i^2} = 1$　である。

$$\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + x^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (-x)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = 1$$

$$= \frac{1}{4} + x^2 + \frac{1}{4} + x^2 + \frac{2}{16} = 2x^2 + \frac{10}{16} = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{10}{16}) = \frac{1}{2}\frac{6}{16} = \frac{3}{16}\ ,\ x = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$

従って、正解は　③　。

Ⅲ－１５

4 次元ベクトル空間における２つのベクトル　$(-1, 2, 1, 0)$, $(1, -1, 0, 2)$　のなす角は、つぎのどれか。

①$\frac{\pi}{6}$　②$\frac{\pi}{4}$　③$\frac{\pi}{3}$　④$\frac{\pi}{2}$　⑤$\frac{2\pi}{3}$

解説と解答：

２つのベクトルの交差する角度θは、

$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$　で表される。

$$\cos\theta = \frac{(-1)(1)+(2)(-1)+(1)(0)+(0)(2)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{-1-2}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

従って、正解は　⑤　。

Ⅲ－１６

３次元ベクトル空間の１次独立なベクトルa, b, cが等式

$$s(a+2b+3c)-t(a-3b-c)+u(a-b+c)=a+2b+c$$

を満たすとき、(s,t,u)は次のどれか。

①$(3,-3,-5)$　②$(3,-5,-3)$　③$(-3,-5,3)$

④$(-5,3,-3)$　⑤$(-3,3,-5)$

解説と解答：

３次元ベクトルが独立である場合は　$a \neq 0,\ b \neq 0, c \neq 0$　であるから、

$k_1a+k_2b+k_3c=0$ において

$k_1=k_2=k_3=0$

与式の場合は、

$(s-t+u-1)a+(2s+3t-u-2)b+(3s+t+u-1)c=0$

$s-t+u-1=0,\ 2s+3t-u-2=0,\ 3s+t+u-1=0$

$3s+2t-3=0$

$5s+4t-3=0$

$s=3,\ t=-3,\ u=1-s+t=-5$

従って、正解は　①　。

Ⅲ－１７

行列　$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$　に対し、行列　$A^3+3A-2E$　は次のどれか。

但しＥは単位行列とする。

①$\begin{bmatrix}2&0&0\\5&2&0\\1&5&2\end{bmatrix}$　②$\begin{bmatrix}2&0&0\\6&2&0\\3&6&2\end{bmatrix}$　③$\begin{bmatrix}2&5&1\\0&2&5\\0&0&2\end{bmatrix}$

④$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　⑤$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

解説と解答：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 + 3A - 2E = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

従って、正解は　⑤　。

Ⅲ－１８

行列　$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$　の階数は、次のどれか。

①１　　②２　　③3　　④4　　⑤0

解説と解答：

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ の階数

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ ２行と３行を加える

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ １行と３行を加える

階数は 2

従って、正解は　②　。

Ⅲ－１９

x, y, z に関する連立方程式

$$\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 4x-5y+6z=0 \\ \quad x+az=0 \end{cases}$$

が $x=y=z=0$　以外の解をもつとき、a の値は次のどれか。

①２　②１　③0　④－１　⑤－２

解説と解答：

AX=0 において、X が０でないので、A の行列式が０である。

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 0 & a \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -15a + 2(4a-6) + 5 = -7a - 7 = 0$$

$$\therefore\ a = -1$$

従って、正解は　④　。

Ⅲ－２０

ｎ次正方行列Ａについて、次の命題のうち１つだけ他の命題と同値でないものがある。それはどれか。

①Ａは直交行列である。

②ＡとＡの転置行列の積は、単位行列である。

③Ａの転置行列とＡの逆行列は一致する。
④Ａの逆行列はＡ自身である。

⑤Ａの列ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_n$ はｎ次元実ベクトル空間 R^n の正規直交基底である。

解説と解答：

直交行列とは $A^t A = E$ であり、A^t は転置行列である。
これより、転置行列が逆行列になっている。
この場合、一般的にはＡ自身は逆行列と一致しない。（$A^{-1} A = E$）
従って、正解は ④ 。