技術士第一次試験
平成 14 年度　共通科目数学　問題と解答

Ⅲ－１
　極限値が自然対数の底 e となるのは、次のどれか。

① $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$　② $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$　③ $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$

④ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$　⑤ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

解説と解答：
　自然対数の底 e　の極限値の表示は下記の通りである。

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=2.71828$$

　これより考察すれば、①　$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{-1}$　である。
　また、②、③は指数が 1/ｎでこれは　0　となるため

$$\lim_{n\to\infty}(1\pm\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1\pm\frac{1}{n})^0=1$$　である。

　また④についてはカッコ内がｎの 2 乗であり、指数はｎであるため、

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=\lim_{n\to\infty}(1)^n=1$$ である。

　⑤はカッコ内、指数供にｎの 2 乗であり、収束の程度が同次であるため、基本形と同一になる。　　従って正解は　⑤。
　これらについては、関数電卓でも、ある程度試算できる。
　例えば n=100　として
　　①　0.36603＝1/2.732　、②　1.000995　、③　0.9998995　④　1.01005
　　⑤　2.71815

Ⅲ－２

$\cos(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{4}{5})$　の値は、次のどれか。

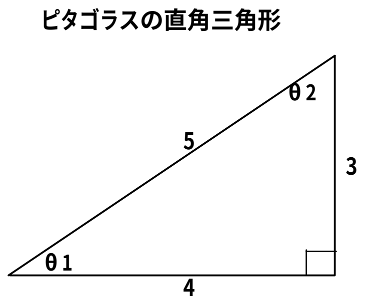
①0　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤1

解説と解答：

$$\cos(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{4}{5})=\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$\theta_1=\sin^{-1}\frac{3}{5}\ ,\theta_2=\sin^{-1}\frac{4}{5}$$

この場合、3,4,5　はピタゴラスの三角形で 5 を斜辺とすればよい。



従って、θ1＋θ2＝90°であり　$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos 90°=0$　　である。

正解は　①。

別解としては、前記を忠実に演算する。

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$\cos\theta_1=\sqrt{1-\sin^2\theta_1}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$$

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$$

$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=0$$

Ⅲ－３

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき、次のうち正しくないものを選べ。

① $f(x)$ は連続である。

② $f'(a)=0$ ならば、 $f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

③ $f(x)$ が $x=a$ において極値をとるならば、 $f'(a)=0$ である。

④ $f'(x)>0$ ならば、 $f(x)$ は単調増加である。

⑤ $f(x)$ が単調増加であるならば、 $f'(x)\geq 0$ である。

解説と解答：

導関数の性質に関する問いである。

①関数 f(x)が微分可能であれば f(x)は連続であり　正しい。

②、③は極値の定義でもあり正しい。

④は単調増加の定義でもあり正しい。

⑤は　$f'(x)>0$ は単調増加で正しいが、$f'(x)=0$ は　$f(x)=$ 定数であり

間違っている。　従って正解は⑤

III－4

関数 $f(x)=\cos x+\tan^{-1}x$　に対して、$f'(0)$ は次のどれか。

①-2　②-1　③$0$　④$1$　⑤$2$

解説と解答：

$$f(x)=\cos x+\tan^{-1}x$$

$$f'(x)=-\sin x+\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(0)=-\sin 0+\frac{1}{1+0}=1$$

従って、正解は　④。

逆正接の微分について

$$y=\tan^{-1}x,\quad x=\tan y,\quad \frac{dx}{dx}=1=\frac{d(\tan y)}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{-d(\cos y)}{dy(\cos y)}=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$$

$$\sin^2 y+\cos^2 y=1,\quad \tan^2 y+1=\frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

III－5

関数 e^{-2x}　をマクローリン展開すると、次のどれになるか。ただし e は自然対数の底とする。

①$1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}-\cdots$　②$1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^4}{6}-\cdots$

③$1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}-\cdots$　④$1-2x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{3x^4}{8}-\cdots$

⑤$1-2x+2x^2-\dfrac{4x^3}{3}+\dfrac{2x^4}{3}-\cdots$

解説と解答：

e^x　のマクローリン展開式は

$$e^{x}=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{4!}x^{4}++$$

である。　これに $x\ \Rightarrow\ -2x$ 　を代入すればよい。すなわち、

$$e^{-2x}=1-2x+\frac{1}{2}4x^{2}-\frac{1}{6}8x^{3}+\frac{1}{24}16x^{4}-+$$
$$=1-2x+2x^{2}-\frac{4}{3}x^{3}+\frac{2}{3}x^{4}-+$$

従って正解は　⑤。

III－６

関数 $y=x^{x}(x>0)$ について、次の正しいものはどれか。ただし、以下の e は自然対数の底とする。

①$x=e$ のとき、極大値をとる。

②$x=e$ のとき、極小値をとる。

③$x=\frac{1}{e}$ のとき、極大値をとる。

④$x=\frac{1}{e}$ のとき、極小値をとる。

⑤極値をとらない。

解説と解答：

両辺の対数を取って微分して $\frac{dy}{dx}=0$ として、極値を計算する。

$$\log y=x\log x,\quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log x+x\frac{1}{x}=\log x+1$$
$$\frac{dy}{dx}=x^{x}(\log x+1)=0$$
$$x>0,\ \ x^{x}\neq 0,\ \therefore\ \log x+1=0$$
$$\log x=-1,\ x=e^{-1}$$

$x>1$ 　では単調増加、$0<x\leq 1$ では　x^{x} は下に凸であるため、極小

従って正解は　④。

III－７

広義積分 $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ の値は、次のどれか。

①$\dfrac{1}{2}$　　②1　　③2　　④4　　⑤存在しない

解説と解答：

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon \to 0}\left|\frac{1}{1-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}\right|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon \to 0}\left|2x^{\frac{1}{2}}\right|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon \to 0}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

従って正解は　③　。

III－8

微分方程式$\dfrac{dy}{dx}=y\sin x$　を初期条件「$x=0$ のとき、$y=\dfrac{1}{e}$」のもとで解くと、その解は次のどれか。ただし、e は自然対数の底とする。

①$e^{\sin x}$　　②$e^{\cos x}$　　③$e^{-\sin x}$　　④$e^{-\cos x}$　　⑤$e^{\tan x}$

解説と解答：

変数分離法によって解く。

$$\frac{dy}{y}=\sin x dx,\ \log y=-\cos x+C,\ y=Ce^{-\cos x}$$

$$x=0,\ y=\frac{1}{e}\qquad e^{-1}=Ce^{-\cos 0}\ ,\ C=1$$

$$y=e^{-\cos x}$$

従って、正解は　④。

III－9

2つの級数　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 及び　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ について、次のうち正しいものを選べ。

①どちらの級数も 1 に収束する。

②どちらの級数も収束する。

③前者の級数は収束し、後者の級数は発散する。

④前者の級数は発散し、後者の級数は収束する。

⑤どちらの級数も発散する。

解説と解答：

両級数ともに、各項が１より小さいので、下記収束判定による。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}+1}}{\frac{1}{2^n+1}} = \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{2^n(1+\frac{1}{2^n})}{2^n(2+\frac{1}{2^n})} < 1$$

従って両級数供に収束する。

また、　前者の級数は等比級数であり

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

であるが、後者の級数は等比級数ではなく、一般公式はなく、１にはならない。

（後者はエクセルによる数値計算の結果は約 0.76449978　となる。）

従って、正解は　②。

等比級数の和の公式について、

$$S = \sum_{n=1}^{N} x^n$$

$$S = x + x^2 + x^3 + + ... + x^N$$

$$xS = \quad x^2 + x^3 + ... + x^N + x^{N+1}$$

$$(1-x)S = x - x^{N+1}, \quad S = \frac{x(1-x^N)}{1-x}, \ x<1 \ , \lim_{N\to\infty} x^N = 0$$

$$\therefore S = \frac{x}{1-x}$$

Ⅲ－１０

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x\sin\frac{1}{y} + y\cos\frac{1}{x})$ の値は、次のどれか。

①$0$　　②$\frac{1}{2}$　　③$1$　　④$2$　　⑤存在しない

解説と解答：

$$\lim_{x,y\to 0}(x\sin\frac{1}{y}+y\cos\frac{1}{x})$$

において、 $y=a\bullet x$, $a\neq 0$ 　としても一般性を失わないので、

$$\lim_{x,y\to 0}(x\sin\frac{1}{ax}+ax\cos\frac{1}{x})$$ 　により評価すればよい。

$-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ ， $-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$ ，$\lim_{x\to 0}x=0$

$$\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=0$$

余弦についても同様に成り立つ。

従って、正解は　①。

Ⅲ－１１

２変数関数 $z=\log(x^2+xy+y^2)$ に対して、 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ は次のどれか。ただし、対数は自然対数とする。

① $\frac{1}{x^2+xy+y^2}$ 　② $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ 　③ $\frac{2(x+y)}{x^2+xy+y^2}$

④ $\frac{2x+3y}{x^2+xy+y^2}$ 　⑤ $\frac{3(x+y)}{x^2+xy+y^2}$

解説と解答：

合成関数の微分であり、媒介変数を使用する。

$z=\log t,\ \ t=x^2+xy+y^2$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{1}{t}(2x+y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1}{t}(x+2y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x+y+x+2y}{t}=\frac{3(x+y)}{x^2+xy+y^2}$$

従って、正解は　⑤。

Ⅲ－１２

重積分 $\iint_D (x+4y)dxdy$ の値は、次のどれか。

ただし、$D:0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq\sqrt{x}$ とする。

①$\dfrac{4}{5}$　　②$\dfrac{6}{5}$　　③$\dfrac{7}{5}$　　④$\dfrac{8}{5}$　　⑤$\dfrac{9}{5}$

解説と解答：

ｙの積分範囲にｘを含むため、２重積分はｙで先に積分する。

$$\iint_D (x+4y)dxdy = \int_0^1 \left| xy + 2y^2 \right|_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 2x)dx$$

$$= \left| \frac{1}{1+\frac{3}{2}} x^{\frac{5}{2}} + x^2 \right|_0^1 = (\frac{2}{5}+1) = \frac{7}{5}$$

従って、正解は　③。

Ⅲ－１３

複素数 z に関する $z^2 - 2iz + 1 = 0$ の２つの解のうち、絶対値が大きいほうの解は次のどれか。ただし、$i = \sqrt{-1}$ とする。

①$(-2+\sqrt{2})i$　　②$(-1+\sqrt{2})i$　　③$(1-\sqrt{2})i$

④$(1+\sqrt{2})i$　　⑤$(2+\sqrt{2})i$

解説と解答：

二次方程式の根の公式を使用する。

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{2}i}{2} = (1 \pm \sqrt{2})i$$

純虚数であり、絶対値の大きい方は、自明であり、

正解は、④。

Ⅲ－１４

４次元ユークリッド空間における２点、$(3,-1,6,-3)$,　$(2,k,1,-4)$　の距離が６のとき、正の数 k の値は次のどれか。

①1　　②2　　③3　　④4　　⑤5

Ⅲ－１５

5 次元数ベクトル空間における２つのベクトル $a = (1,0,2,2,3)$，　$b = (1,3,0,1,x)$

のなす角が$\dfrac{\pi}{4}$となるとき、xの値は次のどれか。

①1　②2　③3　④4　⑤5

解説と解答：

４次元ユークリッド空間における２点（a,b）の距離 L は

$$L=\sqrt{\sum(a_i-b_i)^2}=\sqrt{(3-2)^2+(-1-k)^2+(6-1)^2+(-3+4)^2}$$
$$=\sqrt{1+(1+k)^2+25+1}=\sqrt{k^2+2k+28}=6$$
$$k^2+2k+28-6^2=k^2+2k-8=0\ ,$$
$$(k-2)(k+4)=0\ ,\ k=2\ or\ -4$$

ｋは正のため、正解は、　②。

Ⅲ－１６

４次元数ベクトル空間における２つのベクトル$u=(1,x,5,2),\ \ v=(-1,3,y,z)$が平行であるとき、$(x,y,z)$は次のどれか。

①$(2,-5,3)$　②$(5,-2,-3)$　③$(-3,-5,-2)$

④$(2,-3,-5)$　⑤$(3,2,5)$

解説と解答：

２つのベクトルが平行である場合は夫々の方向余弦が等しくなる。（実際は±1 に等しい）

夫々のベクトルの基準点からの距離を U、V とすると、前問題の定義式より計算できる。

$$\frac{1}{U}=\frac{-1}{V},\ \frac{x}{U}=\frac{3}{V},\ \frac{5}{U}=\frac{y}{V},\ \frac{2}{U}=\frac{z}{V}$$
$$V=-U,\ x=3\frac{U}{V}=-3,\ y=5\frac{V}{U}=-5,\ z=2\frac{V}{U}=-2$$

従って、正解は　③。

この場合、解答群に（－3、－5、－２）があるので方向も含めて平行である。

反対方向で平行の場合は（3、5、2）となる。

Ⅲ－１７

行列$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&0\end{bmatrix}$に対して、行列$A^3-2A^2-5A+7E$は、次のどれか。ただし、$E$は単位行列とする。

①E　②A　③$2A$　④A^2　⑤A^3

解説と解答：

行列の積に関する問題で、まずは忠実に計算して見る。

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&0\end{bmatrix},\ A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&7&2\\0&3&6\end{bmatrix}$$

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&7&2\\0&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&13&14\\0&21&6\end{bmatrix}$$

$$A^3-2A^2-5A+7E=\begin{bmatrix}1-2-5+7&0&0\\0&13-14-5+7&14-4-10\\0&21-6-15&6-12-0+7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E$$

従って、正解は　①。

別解　基本式を代数式として変形して計算する。

$$A^3-2A^2-5A+7E=A^3-2A^2+A-6A+7E$$

$$=A(A-E)^2-6(A-E)+E=(A-E)(A(A-E)-6E)+E$$

$$A-E=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&3&-1\end{bmatrix},A\times(A-E)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix},$$

$$A\times(A-E)-6E=\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$(A-E)(A(A-E)-6E)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&2\\0&3&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

従って E のみが残る。

Ⅲ－１８

行列$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\end{bmatrix}$の階数は、次のどれか。

①1　　②2　　③3　　④4　　⑤5

解説と解答：

行列の階数（rank）とは、行列の各行の標準変形によって行全部が０でない行の数で定義される。正方行列の場合は、この行列を係数とする連立方程式の独立な解の数になる。

夫々の行の差を取ると、

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 6\\ 3 & 4 & 5 & 7\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 6\\ 3 & 4 & 5 & 7\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

従って階数は２で、正解は　②。

Ⅲ－１９

方程式$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=0$を満たす$(x, y)$は、次のどれか。

①$(-3,-4)$　　②$(3,4)$　　③$(-3,4)$　　④$(4,-3)$　　⑤$(-4,-3)$

解説と解答：

行列式を展開して、解の組を代入してみる。

$$\begin{bmatrix}x & y & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}-y\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$=x(1-4)-y(-2-3)+(8+3)=-3x+5y+11=0$$

$$y=\frac{3x-11}{5},$$

$$x=-3\ y=-4,\ x=3\ y=\frac{-2}{5},\ x=4\ y=\frac{1}{5},\ x=-4\ y=\frac{-23}{5}$$

従って、正解は　①。

Ⅲ－２０

行列$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$の固有値は、次のどれか。

①$1,2$　　②$1,3$　　③$2,3$　　④$2,4$　　⑤$1,2,3$

解説と解答：

行列 A の固有値λは下記によって計算する。

$$\left|A-\lambda E\right|=0$$ 従って

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$$ これを展開すると、

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)+2)=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda=2 or 2 or\ 3$$

従って、正解は　③。

以上