平成 17 年度技術士第一次試験
共通科目　数学
解説と解答

III－1　方程式 $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ の解は，次のどれか。

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　③ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

解説：

逆正弦、逆余弦を正弦関数、余弦関数に変換し、正弦と余弦の関係式、すなわち三角関数のピタゴラスの式を適用すればよい。

$$y = \sin^{-1} x = \cos^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$x = \sin y,\quad \frac{\sqrt{5}}{3} = \cos y,\quad \sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - (\frac{\sqrt{5}}{3})^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\sin y = \pm\frac{2}{3},\ \cos y > 0,\ \sin y = \frac{2}{3}$$

従って解答は④

III－2　関数 $y = x\sqrt{1-x^2}$ の導関数 $y'$ は，次のどれか。

① $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　② $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$　③ $\dfrac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}$

④ $\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$　⑤ $\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

解説：

この問題は $u = x, v = \sqrt{1-x^2}$ とし、$y = uv$ の積の微分とするか、

$y = \sqrt{x^2 - x^4}$ として合成関数として微分するか２通りの方法がある。

(1)積の微分

$$y = uv$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

$$y' = \sqrt{1-x^2} + x\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2)合成関数の微分

$$t = x^2 - x^4$$

$$y = \sqrt{t}, \quad y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}(2x-4x^3) = \frac{x(1-2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

従って、解答は⑤

Ⅲ－３　２つの数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$について，次の命題のうち正しいものはどれか。

① $a_n < b_n\,(n=1,2,3,\cdots)$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ である。

② 数列$\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$が収束するならば，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$はともに収束する。

③ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ である。

④ 数列$\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$が収束し，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$も収束するならば，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$は収束する。

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ かつ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ である。

解説：

各項目毎に検討する。

①一般項で大小関係が成り立っても、無限大の極限では成り立たない。例えば

$$a_n = 1 + \frac{1}{2n},\ b_n = 1 + \frac{1}{n} \quad , \quad a_n < b_n$$

$$\lim_{x\to\infty} a_n = 1, \ \lim_{x\to\infty} b_n = 1$$

なる例もあり、この場合は極限では大小関係が成立しない。　誤り。

②$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$　が収束すれば、$\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$　は収束する。

しかし、この逆は一般的に成り立たない。

例えば、
$$a_n = n, \quad b_n = \frac{1}{n^2}, \lim_{x\to\infty} a_n = \infty, \lim_{x\to\infty} b_n = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} a_n b_n = \lim_{x\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

であり、誤り。

③無限大の場合は成り立たない。

例えば、
$$a_n = 2n,\ b_n = n$$
$$\lim_{x\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{x\to\infty} n = \infty$$

従って,誤り。

④正しい。

$a_n < b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ として、題意より、$a_n$ がαに収束し、$a_n - b_n$ がα－β に収束するβが存在する。ある正数 ε（$\varepsilon > 0$）に対して、下記が成り立つ。

(ｉ)ｎ＞$N_1$ なるすべてのｎに対して、$\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するので、

$$|a_n - b_n - (\alpha - \beta)| < \varepsilon$$ となる $N_1$ が存在する。

(ⅱ)ｎ＞$N_2$ なる全てのｎに対して、$a_n$ が収束するので、

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ なる $N_2$ が存在する。

(ⅲ)この $N_1$　$N_2$ の大きい方よりも大きいｎに対して、

$$\begin{aligned}|b_n - \beta| = |a_n - (a_n - b_n) + (\alpha - \beta) - \alpha| &< |a_n - \alpha - \{(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)\}| \\ &< |a_n - \alpha| + |(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

従って、$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ もβに収束する。

⑤無限大の場合は線形演算は成り立たない。例えば、

$$a_n = n,\ b_n = \frac{1}{n}$$
$$\lim_{x\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{x\to\infty}(n - \frac{1}{n}) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} b_n = 0$$

従って、誤り。

以上より解答は④。

Ⅲ－4　関数 $y=\log(x+1)^2$ をマクローリン展開するとき，その展開式の $x^2$ の係数は次のどれか。ただし，対数は自然対数とする。

①　$-2$　　②　$-1$　　③　$0$　　④　$1$　　⑤　$2$

解説：

この問題は対数の指数演算をして微分する方が、見通しが良い。

$$y=\log(x+1)^2=2\log(x+1)$$

また、マクローリング級数は次の通りである。

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+\frac{1}{3!}x^3f'''(0)+\cdots$$

従って題意から $\frac{1}{2}f''(0)$ を求めればよい。

$$y'=2\frac{1}{x+1}$$

$$y''=2(-1)\frac{1}{(x+1)^2}=-2\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}(-2)\frac{1}{(0+1)^2}=-1$$

従って、解答は②。

Ⅲ－5　積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$ の値は，次のどれか。

①　$1$　　②　$\frac{\pi}{2}$　　③　$2$　　④　$\frac{\pi}{2}+1$　　⑤　$3$

解説：

部分積分法を適用する。

$$\int_a^b u\frac{dv}{dx}dx=\int_a^b udv=\left|uv\right|_a^b-\int_a^b vdu \text{、}\qquad u=x, v=\sin x,\ dv=-d(\cos x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd(\cos x)=-\left|x\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$$

$$=0+\left|\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

従って、解答は①

Ⅲ－6　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(y-1)}{x}$ を初期条件「$x=1$ のとき，$y=0$」のもとで解くと，

その解は次のどれか。

① $y=x-1$　② $y=-x+1$　③ $y=x^2-1$

④ $y=-x^2+1$　⑤ $y=x^3-1$

解説：

一階微分方程式を変数分離法で解く。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(y-1)}{x}$$

$$\frac{dy}{y-1}=\frac{2}{x}dx\ ,\quad \log(y-1)=2\log x+\log C=\log Cx^2$$

$$y-1=Cx^2$$

ここで、初期条件として、$x=1$ , $y=0$　を適用し、Ｃを決める。

C＝－１　、

$y-1=-x^2$ , $y=-x^2+1$

従って、解答は④

Ⅲ－7　広義積分 $\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$ の値は，次のどれか。

① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

解説：

部分積分を繰り返し使用する。ここで注目するのは、$e^{-x}$ を微分すると、符号が変わるだけであり、$\cos x$ を２回微分すると、符号が変わるが元に戻る点である。

$$I=\int_0^\infty e^{-x}\cos xdx=-\int_0^\infty \cos xd(e^{-x})=-\left|e^{-x}\cos x\right|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}d(\cos x)$$

$$=1-\int_0^\infty e^{-x}\sin xdx=1+\int_0^\infty \sin xd(e^{-x})=1+\left|e^{-x}\sin x\right|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-x}d(\sin x)$$

$$=1+0-\int_0^\infty e^{-x}\cos xdx=1-I$$

$$2I=1\ ,\ \therefore I=\frac{1}{2}$$

従って,解答は④

Ⅲ－8　次の２変数関数 $f(x,y)$ に対して，$f(0,0)=0$ と定義する。このとき，点 $(0,0)$ で連続とならないものはどれか。

① $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　② $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$　③ $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

④ $f(x,y)=\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$　⑤ $f(x,y)=\dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

解説：

この問題は、x,y が０に近づく極限で、（0、0）に連続できるかを確認すればよい。

この場合一般的には、$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と置き換え $r\to 0$ 即ち $\lim_{r\to 0}$ を考える。

① $$\lim_{x,y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{1}$$

角度θは任意に取れるので、0 点で連続しない。

② $$\lim_{x,y\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2 r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}$$

$$\left|\cos^2\theta\sin\theta\right|\le 1\ ,\ \therefore \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta=0$$

従って、連続する。

以下、分母は同一であり、分子の次数が分母より高いので、②と同様に連続する。

例えば、④では

$$\lim_{x,y\to 0}=\frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)}{r^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{1}$$
$$=\lim_{r\to 0} r\cos 2\theta=0$$

従って、解答は①

Ⅲ－9　2変数関数 $z=3x^2+2xy+y^2-2x+2y$ に対して，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ を満たす $(x,y)$ は，次のどれか。

①　$(-1,1)$　②　$(1,-1)$　③　$(1,-2)$　④　$(2,-1)$　⑤　$(2,1)$

解説：

偏微分をとり、$(x,y)$ の連立方程式を解けばよい。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x+2y-2=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x+2y+2=0 \quad (2)$$

この 2 式から x,y を求める。（1）から（2）を引きと

$4x-4=0$　$,x=1$

これを、(2) に代入すれば、$2(1)+2y+2=0$ ，$2y=-4$ ，$y=-2$

従って、解答は③

Ⅲ－10　閉領域 $D:0\leqq x\leqq 1$，$x\leqq y\leqq 1$ に対して，重積分 $\iint_D x^2y\,dx\,dy$ の値は次のどれか。

①　$\dfrac{1}{15}$　②　$\dfrac{2}{15}$　③　$\dfrac{1}{5}$　④　$\dfrac{4}{15}$　⑤　$\dfrac{1}{3}$

解説：

題意にある通り、ｙの積分領域にｘを含むので、まずｙで積分し、ｘの式にした後にｘで積分すればよい。

$$\int_0^1\left(\int_x^1 x^2y\,dy\right)dx=\int_0^1\left|x^2\frac{1}{2}y^2\right|_x^1 dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^4\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{10-6}{60}=\frac{1}{15}$$

従って、解答は①

Ⅲ－11　1 でない複素数 $\omega$ が $\omega^3=1$ を満たすとき，

$$2+\omega-\omega^2-2\omega^4$$

の値は次のどれか。

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

解説：

この問題は、１の立方根であるωを計算して、予式に代入するか、$\omega^3-1=0$　の因数分解を考えるかで計算法が異なる。

当然ながら、因数分解の方が計算が簡単であるが､そこに至る発想が重要である。

（ｉ）ωの計算

ド・モアブルの定理から計算する。

$$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$\omega^3=1=\cos 2\pi n+i\sin 2\pi n\ , n=0,1,2,\cdots$$
$$\omega^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$
$$\theta=\frac{2\pi n}{3}$$

これから、

$$\omega_1=1,\ \omega_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\omega_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを予式に代入して計算する。ωは複素数であるから 2,3 について計算する。

$$2+\omega-\omega^2-2\omega^4=2+\omega-\omega^2-2\omega\omega^3=2-\omega-\omega^2=2-(\omega+\omega^2)$$
$$\omega^2=(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\mp i2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\omega+\omega^2=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}+-\frac{1}{2}\mp i\frac{\sqrt{3}}{2}=-1$$
$$2-(\omega+\omega^2)=2-(-1)=3$$

（ii）因数分解の方法

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$　これを $\omega^3-1=0$ に適用する。

$$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

ここで題意より、$\omega\neq 1$　従って、$\omega^2+\omega+1=0$

予式を前記を考慮して変形する。

$$2+\omega-\omega^2-2\omega^4=2+\omega-\omega^2-2\omega=2-\omega-\omega^2$$
$$=2+1-1-\omega-\omega^2=3-(1+\omega+\omega^2)=3-0=3$$

従って、解答は④

Ⅲ－12　４次元空間の２つのベクトル

$$\vec{a}=(1,\ 0,\ -1,\ 1),\qquad \vec{b}=(0,\ -2,\ -t,\ 0)$$

に対して，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $-2\vec{a}+\vec{b}$ が垂直であるとき，正の数 $t$ の値は次のどれか。

①　1　　②　$2\sqrt{2}$　　③　$3\sqrt{3}$　　④　8　　⑤　$5\sqrt{5}$

解説：

２つのベクトルが垂直であるならば、その内積が $\cos\frac{\pi}{2}=0$ となる関係より計算する。

$$2\vec{a}+\vec{b}=(2+0,0-2,-2-t,2+0)=(2,-2,-2-t,2)$$
$$-2\vec{a}+\vec{b}=(-2+0,0-2,2-t,-2+0)=(-2,-2,2-t,-2)$$
$$(2\vec{a}+\vec{b})\bullet(-2\vec{a}+\vec{b})=2(-2)+(-2)(-2)+(-2-t)(2-t)+2(-2)$$
$$=-4+4-(4-t^2)-4=0$$
$$t^2-8=0\ ,\ \therefore t=\pm2\sqrt{2}$$

ｔは正数であるから、解答は②

Ⅲ－13　５次元空間のベクトル $\left(1,\ \frac{t}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ t,\ -1\right)$ の大きさが 3 であるとき，正の数 $t$ の値は次のどれか。

①　1　　②　$\sqrt{2}$　　③　$\sqrt{3}$　　④　2　　⑤　$\sqrt{5}$

解説：

ベクトルの大きさは、各要素の２乗和の平方根である。これを使って計算する。

$$\sqrt{1^2+(\frac{t}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+t^2+(-1)^2}=3$$

$$\sqrt{1+\frac{3}{4}+1+\frac{t^2}{4}+t^2}=\sqrt{\frac{11}{4}+\frac{5t^2}{4}}=3$$

$$11+5t^2=9\cdot 4=36$$

$$\therefore t=\pm\sqrt{\frac{36-11}{5}}=\pm\sqrt{\frac{25}{5}}=\pm\sqrt{5}$$

ｔは正数であるから、解答は⑤

Ⅲ－14　直線 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$ と平面 $x-y+z=8$ との交点の $z$ 座標は，次のどれか。

①　7　　②　8　　③　9　　④　10　　⑤　11

解説：

３次元空間における直線式をパラメータｔで表し、これを平面の式に代入して、パラメータｔを求めればよい。

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}=t$$

$$x=2t,\ y=3t,\ z+1=4t\ ,\ z=4t-1$$

$$x-y+z=2t-3t+4t-1=8$$

$$3t=8+1=9\ ,\ t=3$$

これを、元の直線のパラメータ表示式に代入すればよい。

$$z=4t-1=4\cdot 3-1=12-1=11$$

従って、解答は⑤

Ⅲ－15　方程式 $\begin{vmatrix} x & 0 & -6 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix}=0$ の実数解は，次のどれか。

①　1　　②　2　　③　3　　④　4　　⑤　5

解説：

予式の行列式を展開し、ｘの代数方程式から計算する。

$$x\{x(x-3)-(-1)2\}+(-6)(-1)(-1)$$
$$=x^2(x-3)+2x-6=x^2(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x^2+2)=0$$

元の式は３次代数式になるが、因数分解できるように変形すればよい。
これより、実数解は直ちに求まる。

$$x=3\ or\ \ x=\pm i\sqrt{2}$$

従って、解答は③。

Ⅲ－16　行列式について，次の命題のうち正しくないものはどれか。

①　行列式の１つの行に他の行を加えても，行列式の値は変わらない。

②　行列式で２つの列を入れかえても，行列式の値は変わらない。

③　行列式の１つの行を $k$ 倍すると，行列式の値は $k$ 倍となる。

④　行列式の１つの列を $k$ 倍すると，行列式の値は $k$ 倍となる。

⑤　２つの行が一致する行列式の値は０である。

解説：

これは、行列式の基本的性質に関する問題である。基本的性質もまとめると、

(ｉ)行列式の行（又は列）を定数倍すれば、元の行列式の値も定数倍となる。

(ii)行列式の行（又は列）が他の行（又は列）と比例関係にある場合は行列式の値は０となる。

(iii)行列式の行（又は列）を定数倍したの行（又は列）に加えても、元の行列式の値は変わらない。

(iv)行列式の任意の行（又は列）を入れ替えると行列式の値の符号のみが変わる。

以上の基本的性質より見れば、①､③、④、⑤は正しい。

②の場合は、例えば、次のように列を入れ替えれば値は変わらないが符合が変わる。

$$A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_1c_2-a_2b_1+a_2c_1$$

$$B=\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 \\ c_2 & c_1 & 1 \end{vmatrix}=a_2b_1-a_2c_1-a_1b_2+a_1c_2=-(a_1b_2-a_1c_2-a_2b_1+a_2c_1)=-A$$

従って、解答は②。

Ⅲ－17　連立方程式 $\begin{cases} x-2y=k \\ x+2y=9 \\ 2x-3y=3+k \end{cases}$ が解を持つとき，定数 $k$ の値は次のどれか。

①　1　　②　2　　③　3　　④　4　　⑤　5

解説：

定数ｋをパラメータとして、連立方程式を解き、その解の関係からｋを求める。

$x-2y=k$　　(1)

$x+2y=9$　　(2)

$2x-3y=3+k$　　(3)

$(1)+(2)$

$2x=k+9$　　(4)

$3\times(2)+2\times(3)$

$3x+6y+4x-6y=7x=27+6+2k=33+2k$　　(5)

$7\times(4)-2\times(5)$

$7k+63-66-4k=3k-3=0$

$k=1$

従って、解答は①。

Ⅲ－18　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ の階数は，次のどれか。

①　1　　②　2　　③　3　　④　4　　⑤　0

解説：

階数とは、行列 A に基本変形を行って、ゼロｎ次の単位行列にすることが出来れば、この場合の階数がｎであり、rank(A)=n　と表す。これは A の列ベクトルのなかで、一次独立な個数がｎであると言う事ができる。

階数の計算は、与えられた行列を基本変形し段階行列の形に変形する。

（1）行ー（3）行

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）ー（1）×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

（4）列ー（1）列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）列ー（1）列× 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

（3）列＋（1）列×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & -11 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

（3）行ー（2）行

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

（3）列ー（2）列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

（2）列× 3＋（4）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

（3）列と（4）列を入れ換え 3 で割る

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となり階数は 3 である。

従って、解答は③

Ⅲ－19　行列 $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が $AB=BA$ を満たすとき，$x$ の値は次のどれか。

ただし，$a$ は定数とする。

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

解説：

行列の積 AB 及び BA を求め、α を決めて、x を求める。

$$AB = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha x \\ 2 & \alpha + 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha \\ x+1 & 2 \end{bmatrix}$$

これより、$\alpha = 0$

$x + 1 = 2$

$\therefore \quad x = 1$

従って、解答は②

Ⅲ－20　行列 $\begin{pmatrix} 8 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値のうち，正であるものは次のどれか。

①　4　　②　5　　③　6　　④　7　　⑤　8

解説：

行列 A の固有値λは次の行列式より求める。

$$|A - \lambda E| = 0$$

ここで、E は単位行列である。

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)\{(-\lambda)(-2-\lambda)+1\}$$

$$= (\lambda - 8)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda - 8)(\lambda + 1)^2$$

これより、$\lambda = 8,\ \lambda = -1$　　設問は正の固有値である。

従って、解答は⑤